Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

П. П. КОРОВКИН

НЕРАВЕНСТВА

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 5

П. П. КОРОВКИН

НЕРАВЕНСТВА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

512
К 66
УДК 512.13

2-2-2
213-66

ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе математики средней школы учащийся знакомится со свойствами неравенств и методами их решения в простейших случаях (неравенства первой и второй степени).

В этой книжке автор не ставил себе целью изложить основные свойства неравенств, а стремился лишь познакомить учащихся старших классов средней школы с некоторыми замечательными неравенствами, играющими большую роль в различных разделах высшей математики, и применением их к нахождению наибольшего и наименьшего значения величин и к вычислению некоторых пределов.

В книжке приводится 62 задачи, из которых 36 с подробными решениями составляют основное ее содержание, а 26 задач даются в конце §§ 1, 4, 5 мелким шрифтом в качестве упражнений. Решение упражнений читатель найдет в конце книжки.

Самостоятельное решение нескольких трудных задач, несомненно, принесет учащимся бóльшую пользу, чем решение большого числа задач простых.

Поэтому мы предлагаем учащимся обращаться к решениям упражнений только после того, как будет найдено самостоятельное решение, быть может и отличающееся (что очень хорошо!) от решения, указанного автором.

При доказательстве неравенств и решении задач автор пользовался лишь свойствами неравенств и пределов, изучаемыми в 9 классе средней школы.

П. Коровкин

§ 1. *Целой частью числа* x (обозначается $[x]$) называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Из этого определения следует, что $[x] \leqslant x$, так как целая часть не превосходит x. С другой стороны, так как $[x]$ — наибольшее целое число, удовлетворяющее последнему неравенству, то $[x]+1>x$

Таким образом, $[x]$ есть целое число, определяющееся неравенствами

$$[x] \leqslant x < [x]+1.$$

Так, например, из неравенств

$$3<\pi<4,\ 5<\frac{17}{3}<6,\ -2<-\sqrt{2}<-1,\ 5=5<6$$

следует, что

$$[\pi]=3,\quad \left[\frac{17}{3}\right]=5,\quad [-\sqrt{2}]=-2,\quad [5]=5.$$

Задача 1. Найти целую часть числа

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Решение. Воспользуемся неравенствами:

$$1 \leqslant 1 \leqslant 1,$$

$$0{,}7<\sqrt{\frac{1}{2}}<0{,}8,$$

$$0{,}5<\sqrt{\frac{1}{3}}<0{,}6,$$

$$0{,}5 \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}} \leqslant 0\,5,$$

$$0{,}4<\sqrt{\frac{1}{5}}<0{,}5$$

(они получаются при извлечении корней с точностью до 0,1 с недостатком и избытком). Сложив эти неравенства [1]), получим:

$$1+0{,}7+0{,}5+0{,}5+0{,}4<x<1+0{,}8+0{,}6+0{,}5+0{,}5,$$

т. е. $3{,}1<x<3{,}4$ и, следовательно, $[x]=3$.

Задача 2. Найти целую часть числа

$$y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Решение. Эта задача отличается от предыдущей только количеством слагаемых: в первой слагаемых 5, во второй — 1 000 000. Но уже это обстоятельство делает практически невозможным применение предыдущего метода решения.

Для решения задачи изучим сумму

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

С этой целью докажем неравенства

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}. \qquad (1)$$

В самом деле, так как

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

и

$$\sqrt{n+1}>\sqrt{n},$$

то

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этим доказана первая часть неравенства (1); вторая его часть доказывается аналогично.

---

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, ч. II, 1956 г., стр. 68.

Полагая в неравенствах (1) $n=2, 3, 4, \ldots, n$, получим:

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,$$
$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$
$$2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

Сложим теперь эти неравенства

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}<$$
$$<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2.$$

Прибавляя ко всем частям полученных неравенств по 1, найдем:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<$$
$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \quad (2)$$

Так как $2\sqrt{2}<3$, а $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$, то из неравенств (2) следует, что

$$2\sqrt{n}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \quad (3)$$

Пользуясь неравенствами (3), легко найдем теперь целую часть числа

$$y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Для этого, полагая в неравенствах (3) $n=1\,000\,000$, получим:

$$2\sqrt{1\,000\,000}-2<$$
$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<2\sqrt{1\,000\,000}-1,$$

или

$$1998<y<1999.$$

Следовательно, $[y]=1998$.

Задача 3. Доказать неравенство

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Решение. Положим

$$y=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}.$$

Так как

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\quad\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\quad\frac{5}{6}<\frac{6}{7},\quad\ldots,\quad\frac{99}{100}<\frac{100}{101},$$

то $x<y$ и, следовательно [1]),

$$x^2<xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим [2]):

$$x<\frac{1}{\sqrt{101}}<0{,}1.$$

Упражнения

1. Доказать неравенства

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

2. Доказать неравенства

$$1800<\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<1800{,}02.$$

3. Найти $[50z]$, где

$$z=\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

Ответ. $[50z]=90\,000$.

4. Методом математической индукции доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

---

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, ч. II, 1956 г., стр. 68.
[2]) Там же, стр. 99.

§ 2. Перейдем теперь к изучению некоторых важных неравенств, применяемых при решении многих задач.

Из неравенства $(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$ следует, что $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1x_2$, причем знак равенства имеет место, только когда $x_1 = x_2$.

Если x_1 и x_2 — положительные числа, то, разделив обе части последнего неравенства на x_1x_2, получим:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geqslant 2. \tag{4}$$

Пользуясь неравенством (4), легко докажем что *сумма двух положительных чисел не меньше 2 если произведение их равно единице.*

В самом деле, если $xy = 1$, то $y = \frac{1}{x}$. Неравенство $x + y \geqslant 2$, т. е $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ следует из неравенства (4) при $x_1 = x$ и $x_2 = 1$

Докажем теперь теорему

Теорема 1. *Если произведение n положительных чисел равно 1 то их сумма не меньше n*

Другими словами, из равенства $x_1x_2x_3 \ldots x_n = 1$ следует, что $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geqslant n$, причем $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n > n$, если числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ не все одинаковы

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции [1]).

Ранее мы доказали справедливость теоремы 1 для случая двух положительных чисел ($n = 2$).

Предполагая, что теорема верна для $n = k \geqslant 2$, т. е. предполагая, что неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \geqslant k$$

имеет место, если $x_1x_2x_3 \ldots x_k = 1$, докажем теорему для $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1,$$

если $x_1x_2x_3 \ldots x_kx_{k+1} = 1$, причем $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $\ldots$, $x_k > 0$, $x_{k+1} > 0$.

---

[1]) Подробнее о методе математической индукции рассказано в книжке: И. С. Соминский, Метод математической индукции. изд. 7, Главная редакция физико-математической литературы. 1965 (серия «Популярные лекции по математике», выпуск 3).

Прежде всего заметим, что если

$$x_1x_2x_3 \ldots x_kx_{k+1} = 1,$$

то могут представиться два случая:

1) все множители x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1} одинаковы, т. е.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_k = x_{k+1},$$

2) не все множители одинаковы

В первом случае каждый множитель равен единице, а их сумма равна $k + 1$, т. е.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1.$$

Во втором случае среди множителей произведения $x_1x_2 \ldots x_kx_{k+1}$ найдутся числа как больше, так и меньше единицы (если бы все множители были меньше единицы, то и произведение их было бы меньше единицы)

Пусть, например, $x_1 < 1$, а $x_{k+1} > 1$. Мы имеем:

$$(x_1x_{k+1})\, x_2x_3 \ldots x_k = 1.$$

Полагая $y_1 = x_1x_{k+1}$, получим:

$$y_1x_2x_3 \ldots x_k = 1.$$

Так как здесь произведение k положительных чисел равно единице, то (согласно предположению) их сумма не меньше k, т. е.

$$y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \geqslant k.$$

Но

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} &= \\ &= (y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geqslant \\ &\geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k + 1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $y_1 = x_1x_{k+1}$, получим:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} &\geqslant \\ &\geqslant (k + 1) + x_{k+1} - x_1x_{k+1} + x_1 - 1 = \\ &= (k + 1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1). \end{aligned}$$

Так как $x_1 < 1$, а $x_{k+1} > 1$, то $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} &\geqslant \\ &\geqslant (k + 1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1. \end{aligned}$$

Этим теорема 1 доказана.

Задача 1. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, ..., x_n— положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n,$$

причем знак равенства имеет место, только когда

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n.$$

Решение. Так как

$$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}=1,$$

то неравенство следует из теоремы 1. Знак равенства имеет место, только когда

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1,$$

т. е. когда $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$.

Задача 2. Доказать неравенство

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Так как произведение слагаемых в правой части равенства равно единице, то их сумма не меньше двух. Знак равенства имеет место только при $x=0$.

Задача 3. Доказать, что при $a>1$

$$\lg a+\log_a 10\geqslant 2.$$

Решение. Так как $\log_a 10\cdot\lg a=1$, то

$$\lg a+\log_a 10=\lg a+\frac{1}{\lg a}\geqslant 2.$$

Задача 4. Доказать неравенство

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Решение. Разделим на x^2 числитель и знаменатель левой части неравенства

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}.$$

Так как $\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$, то $\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2$, и, следовательно,

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Определение. Число $g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ называется *средним геометрическим* положительных чисел $x_1, x_2\ldots, x_n$, а число $a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ называется *средним арифметическим* этих же чисел.

Теорема 2. *Среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел.*

Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не все одинаковы, то среднее геометрическое этих чисел меньше их среднего арифметического.

Доказательство. Из равенства $g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ следует, что

$$1=\sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g}},\text{ или }\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g}=1.$$

Так как произведение n положительных чисел равно 1, то (теорема 1) их сумма не меньше n, т. е.

$$\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\ldots+\frac{x_n}{g}\geqslant n.$$

Умножив обе части последнего неравенства на g и разделив на n, получим:

$$a=\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n}\geqslant g.$$

Заметим, что равенство имеет место, только когда

$$\frac{x_1}{g}=\frac{x_2}{g}=\ldots=\frac{x_n}{g}=1,\text{ т. е. }x_1=x_2=\ldots=x_n=g.$$

Если же числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не все одинаковы, то

$$a>g.$$

Задача 5. Из всех параллелепипедов с данной суммой трех взаимно перпендикулярных ребер найти тот, объем которого наибольший.

Решение. Пусть $m = a + b + c$ — сумма ребер, а $V = abc$ — объем параллелепипеда. Так как

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3},$$

то $V \leqslant \frac{m^3}{27}$. Знак равенства имеет место, только когда $a = b = c = \frac{m}{3}$, т. е. когда параллелепипед есть куб.

Задача 6. Доказать неравенство

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \geqslant 2. \tag{5}$$

Решение. Пользуясь теоремой 2, получим:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)\,n}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Возведя в n-ю степень обе части последнего неравенства, мы и получим неравенство (5).

Определение. Число

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

называется *средним степенным* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ порядка α. В частности, число

$$c_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

есть среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, число

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

называется *средним квадратическим*, а число

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

называется *средним гармоническим* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Задача 7. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $\alpha < 0 < \beta$, то

$$c_\alpha \leqslant g \leqslant c_\beta, \tag{6}$$

т. е. среднее степенное с отрицательным показателем не превосходит среднего геометрического, а среднее степенное с положительным показателем не меньше среднего геометрического.

Решение. Пользуясь тем, что среднее геометрическое положительных чисел не превосходит среднего арифметического, имеем:

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \ldots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{1}{\alpha}$ и учитывая, что $\frac{1}{\alpha} < 0$, получим:

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha .$$

Этим доказана первая часть неравенства (6); вторая часть доказывается аналогично.

Из неравенства (6) следует, в частности, что среднее гармоническое c_{-1} не превосходит среднего арифметического c_1.

Задача 8. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Решение. Так как $c_{-1} \leqslant g \leqslant c_1$, то

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = c_1 .$$

Из этого неравенства следует, что

$$n^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Задача 9. Доказать, что для любых положительных чисел a, b $(a \neq b)$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a + nb}{n + 1}.$$

Решение. Имеем:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{abb\ldots b}_{n}} < \frac{a+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{n}}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1},$$

что и требовалось.

Задача 10. Доказать, что с увеличением номера n величины

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ и } z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

увеличиваются, т. е.

$$x_n < x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\ z_n < z_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Решение. Полагая в неравенстве предыдущей задачи $a=1$, $b=1+\frac{1}{n}$, получим:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Возводя обе части неравенства в $(n+1)$-ю степень, будем иметь:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\ \text{т. е. } x_n < x_{n+1}.$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Задача 11. Доказать, что

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

убывает с увеличением номера n, т. е.

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Решение. Имеем:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

(см. обозначения задачи 10). Так как z_n возрастает с увеличением номера n, то y_n убывает.

В задачах 10 и 11 мы доказали, что

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

$$y_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = 3{,}375 > y_3 > \ldots > y_n > \ldots$$

С другой стороны,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4.$$

Итак, переменная величина x_n удовлетворяет двум условиям:

1) x_n монотонно возрастает вместе с возрастанием номера n,

2) x_n — ограниченная величина, $2 < x_n < 4$.

Известно [1]), что монотонно возрастающая и ограниченная переменная величина имеет предел. Следовательно, существует предел переменной величины x_n. Этот предел обозначают буквой e, т. е.

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Так как величина x_n приближается к своему пределу возрастая, то x_n меньше своего предела, т. е.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e. \qquad (7)$$

Нетрудно проверить, что $e < 3$. В самом деле, если номер n велик, то

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 = 2{,}985984.$$

Следовательно, и

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant 2{,}985984 < 3.$$

---

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, ч. II, 1956 г., стр. 206.

Число e наряду с числом π имеет в математике большое значение. Оно употребляется, например, в качестве основания логарифмов, называемых *натуральными логарифмами*. Логарифм числа N при основании e символически обозначается $\ln N$ (читается: логарифм натуральный N).

Известно, что числа e и π иррациональны. Каждое из этих чисел вычислено с точностью до 808 знаков после запятой, причем

$$e = 2{,}7182818285490\ldots$$

Покажем теперь, что и предел переменной величины y_n равен e. В самом деле,

$$\lim y_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Так как y_n приближается к числу e убывая (задача 11), то

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e. \tag{8}$$

Задача 12. Доказать неравенство

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{9}$$

Решение. Мы докажем неравенство (9) методом математической индукции. Оно легко проверяется для $n = 1$. В самом деле,

$$1! = 1 > \left(\frac{1}{e}\right)^1.$$

Предположим, что неравенство (9) справедливо для $n = k$, т. е.

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $k+1$, получим:

$$(k+1)\,k! = (k+1)! > \left(\frac{k}{e}\right)^k (k+1) = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.$$

Так как согласно неравенству (7) $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$, то

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\frac{e}{e} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1},$$

т. е. неравенство (9) доказано для $n = k + 1$. Этим самым доказана справедливость неравенства (9) для всех значений n.

Так как $e < 3$, то из неравенства (9) следует, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

С помощью последнего неравенства легко доказать, что

$$300! > 100^{300}.$$

В самом деле, полагая в нем $n = 300$, получим:

$$300! > \left(\frac{300}{3}\right)^{300} = 100^{300}.$$

Совершенно аналогично неравенству задачи 12 доказывается неравенство

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Задача 13. Доказать неравенство

$$na_1a_2 \ldots a_n \leqslant a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n, \tag{10}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$.

Решение. Так как среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, то

$$a_1a_2 \ldots a_n = \sqrt[n]{a_1^n a_2^n \ldots a_n^n} \leqslant \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{n}.$$

Умножая обе части этого неравенства на n, мы и получим неравенство (10).

Из неравенства (10) следует, что

$$2a_1a_2 \leqslant a_1^2 + a_2^2, \qquad 3a_1a_2a_3 \leqslant a_1^3 + a_2^3 + a_3^3,$$
$$4a_1a_2a_3a_4 \leqslant a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4,$$

т. е. *удвоенное произведение двух положительных чисел не превосходит суммы их квадратов, утроенное произведение трех чисел не превосходит суммы их кубов* и т. д.

§ 3. При решении задач предыдущего параграфа мы пользовались тем, что среднее геометрическое положительных чисел не превосходит среднего арифметического этих

же чисел, т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

причем знак равенства имеет место только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

В следующей теореме, пользуясь этим же неравенством, докажем важнейшее неравенство этого параграфа, которое, как мы увидим в дальнейшем, часто применяется при решении задач.

Теорема 3. *Если* $x \geqslant -1$ *и* $0 < \alpha < 1$, *то*

$$(1 + x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x. \tag{11}$$

Если же $\alpha < 0$ *или* $\alpha > 1$, *то*

$$(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x. \tag{12}$$

Знак равенства в (11) *и* (12) *имеет место только при* $x = 0$.

Доказательство. Предположим, что α — рациональное число, причем $0 < \alpha < 1$. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа, $1 \leqslant m < n$. Так как по условию $1 + x \geqslant 0$, то

$$(1 + x)^\alpha = (1 + x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1 + x)^m \cdot 1^{n-m}} =$$

$$= \sqrt[n]{\underbrace{(1 + x)(1 + x)\ldots(1 + x)}_{m} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \ldots 1}_{n-m}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\underbrace{(1 + x) + (1 + x) + \ldots + (1 + x)}_{m} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-m}}{n} =$$

$$= \frac{m(1 + x) + n - m}{n} = \frac{n + mx}{n} = 1 + \frac{m}{n} x = 1 + \alpha x.$$

Знак равенства имеет место, только когда все множители, стоящие под знаком корня, одинаковы, т. е. когда $1 + x = 1$, $x = 0$. Если же $x \neq 0$, то

$$(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x.$$

Таким образом, мы доказали первую часть теоремы для того случая, когда α — рациональное число.

Предположим теперь, что α — иррациональное число, $0 < \alpha < 1$. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность рациональных чисел, имеющая пределом число α, причем

$0 < r_n < 1$. Из неравенств

$$(1 + x)^{r_n} \leqslant 1 + r_n x, \quad x \geqslant -1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

уже доказанных нами для случая, когда показателем степени является рациональное число, следует, что

$$(1 + x)^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} (1 + x)^{r_n} \leqslant \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x.$$

Этим неравенство (11) доказано и для иррациональных значений α. Нам остается еще доказать, что для иррациональных значений α при $x \neq 0$ и $0 < \alpha < 1$

$$(1 + x)^{\alpha} < 1 + \alpha x,$$

т. е. что при $x \neq 0$ в (11) знак равенства не имеет места. С этой целью возьмем рациональное число r такое, что $\alpha < r < 1$. Очевидно, имеем:

$$(1 + x)^{\alpha} = \left[(1 + x)^{\frac{\alpha}{r}}\right]^r.$$

Так как $0 < \frac{\alpha}{r} < 1$, то, как уже доказано,

$$(1 + x)^{\frac{\alpha}{r}} \leqslant 1 + \frac{\alpha}{r} x.$$

Следовательно,

$$(1 + x)^{\alpha} \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{r} x\right)^r.$$

Если $x \neq 0$, то $\left(1 + \frac{\alpha}{r} x\right)^r < 1 + r \frac{\alpha}{r} x = 1 + \alpha x$, т. е.

$$(1 + x)^{\alpha} < 1 + \alpha x.$$

Этим первая часть теоремы доказана полностью.

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Если $1 + \alpha x < 0$, то неравенство (12) очевидно, так как левая часть его неотрицательна, а правая отрицательна.

Если $1 + \alpha x \geqslant 0$, $\alpha x \geqslant -1$, то рассмотрим отдельно оба случая.

Пусть $\alpha > 1$; тогда в силу доказанной первой части теоремы имеем:

$$(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha x = 1 + x,$$

причем знак равенства имеет место только при $x = 0$. Возводя обе части последнего неравенства в степень α,

получим:

$$1 + \alpha x \leqslant (1 + x)^{\alpha}.$$

Пусть теперь $\alpha < 0$. Если $1 + \alpha x < 0$, то неравенство (12) очевидно. Если же $1 + \alpha x \geqslant 0$, то выбираем целое положительное число n так, чтобы имело место неравенство $-\frac{\alpha}{n} < 1$. В силу первой части теоремы получим:

$$(1 + x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n} x,$$

$$(1 + x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n} x} \geqslant 1 + \frac{\alpha}{n} x$$

$\left(\text{последнее неравенство справедливо, так как } 1 \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} x^2\right)$.

Возводя в n-ю степень обе части последнего неравенства, получим:

$$(1 + x)^{\alpha} \geqslant \left(1 + \frac{\alpha}{n} x\right)^n \geqslant 1 + n \frac{\alpha}{n} x = 1 + \alpha x.$$

Заметим, что равенство возможно только в случае, когда $x = 0$. Этим теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Если* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— положительные числа и* $\alpha < \beta$, *то* $c_{\alpha} \leqslant c_{\beta}$, *причем* $c_{\alpha} = c_{\beta}$, *только когда*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

Доказательство. Для случая, когда числа α и β имеют разные знаки, теорема 4 доказана нами выше (см. задачу 7 предыдущего параграфа и предшествующее ей определение). Нам остается доказать теорему только для случая, когда α и β имеют одинаковые знаки.

Предположим, что $0 < \alpha < \beta$, и положим

$$k = c_{\alpha} = \left(\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Разделив c_{β} на k, получим:

$$\frac{c_{\beta}}{k} = \frac{c_{\beta}}{c_{\alpha}} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^{\beta} + \left(\frac{a_2}{k}\right)^{\beta} + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Положив теперь

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^{\alpha}, \quad d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^{\alpha}, \quad \ldots, \quad d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^{\alpha},$$

получим:

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \qquad (13$$

Так как

$$\left(\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{k} c_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} c_\alpha = 1,$$

то

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} = 1, \quad d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n.$$

Положим

$$d_1 = 1 + x_1, \quad d_2 = 1 + x_2, \quad \ldots, \quad d_n = 1 + x_n.$$

Из равенства $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n$ следует, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

На основании теоремы 3 $\left(\text{заметим, что } \frac{\beta}{\alpha} > 1\right)$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_1, \\ d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\frac{c_\beta}{k} \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1, \qquad c_\beta \geqslant k = c_\alpha.$$

Заметим, что $c_\beta = k = c_\alpha$, только когда в (*) всюду имеют место знаки равенства, т. е. когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (теорема 3). В этом случае $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 1$ и,

следовательно, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = k$. Если же числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не все одинаковы, то

$$c_\beta > c_\alpha .$$

Этим теорема 4 доказана для случая, когда $0 < \alpha < \beta$.

Если $\alpha < \beta < 0$, то $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$. Рассуждая так же, как и прежде, мы получим в (*) и (14) обратные знаки неравенства. Но так как $\beta < 0$, то из неравенства

$$\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leqslant 1$$

следует, что

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \geqslant 1^{\frac{1}{\beta}} = 1,$$

т. е.

$$c_\beta \geqslant k = c_\alpha .$$

Этим теорема 4 доказана полностью.

В дальнейшем мы называем среднее геометрическое *средним степенным порядка нуль*, т. е. полагаем $g = c_0$.

Заметим, что теорема 4 остается в силе и в этом случае, так как (задача 7 § 2) $c_\alpha \leqslant g = c_0$, если $\alpha < 0$, и $c_\beta \geqslant g = c_0$, если $\beta > 0$.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что

$$c_{-1} \leqslant c_0 \leqslant c_1 \leqslant c_2,$$

т. е. среднее гармоническое не превосходит среднего геометрического, среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, а среднее арифметическое не превосходит среднего квадратического положительных чисел. Например, если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, то

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7} = 1{,}7\ldots,$$

$$c_0 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2,$$

$$c_1 = \frac{1 + 2 + 4}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}3\ldots,$$

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 4 + 16}{3}} = \sqrt{7} = 2{,}6\ldots,$$

и следовательно,

$$c_{-1} = 1{,}7\ldots < 2 = c_0 < 2{,}3\ldots = c_1 < 2{,}6\ldots = c_2.$$

Задача 1. Доказать, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$, если $x + y + z = 6$.

Решение. Так как среднее арифметическое не превосходит среднего квадратического, то

$$\frac{x+y+z}{3} \leqslant \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ т. е. } x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}.$$

В нашей задаче $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{6^2}{3} = 12$. Знак равенства имеет место, только когда $x = y = z = 2$.

Задача 2. Доказать, что если x, y, z — положительные числа и $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, то

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Так как $c_2 \leqslant c_3$, то

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В нашей задаче

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \sqrt{\frac{8}{3}},$$

т. е.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3 \cdot \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 3. Доказать, что для положительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n справедливы неравенства

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^\alpha \leqslant \leqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha), \quad \alpha \geqslant 1, \tag{15}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^\alpha \geqslant \geqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{16}$$

Решение. Если $\alpha > 1$, то

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = c_1.$$

Из этого неравенства легко следует неравенство (15). Точно так же доказывается и неравенство (16). В частности, из неравенств (15) и (16) следует, что

$$(x+y)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha), \quad \alpha \geqslant 1, \quad x > 0, \quad y > 0,$$
$$(x+y)^\alpha \geqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Задача 4. Доказать, что если $x^3 + y^3 + z^3 = 81$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$x + y + z \leqslant 9.$$

Решение. Так как

$$(x+y+z)^3 \leqslant 3^2(x^3 + y^3 + z^3) = 9 \cdot 81 = 729$$

(неравенство (15)), то

$$x + y + z \leqslant \sqrt[3]{729} = 9.$$

Задача 5. Доказать, что если $0 > \alpha > -1$, то

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \qquad (17)$$

Решение. Так как $0 < \alpha + 1 < 1$, то в силу неравенства (11) имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 + \frac{\alpha+1}{n},$$
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 - \frac{\alpha+1}{n}.$$

Умножая эти неравенства на $n^{\alpha+1}$, получим:

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1)n^\alpha,$$
$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1)n^\alpha.$$

Из этих неравенств легко следуют неравенства (17).

Задача 6. Доказать, что если $0 > \alpha > -1$, то

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{\alpha+1} <$$
$$< m^\alpha + (m+1)^\alpha + \ldots + n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \qquad (18)$$

Решение. Положив в неравенствах (17) $n = m$, $m+1, \ldots, n$, получим:

$$\frac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha} < m^{\alpha} < \frac{m^{1+\alpha} - (m-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

$$\frac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < (m+1)^{\alpha} < \frac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

$$\frac{(m+3)^{1+\alpha} - (m+2)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < (m+2)^{\alpha} < \frac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

. . . . . .

$$\frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Сложив эти неравенства, мы и получим (18).

Задача 7. Найти целую часть числа

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

Решение. Положив в (18) $m = 4$, $n = 1\,000\,000$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, получим:

$$\frac{1\,000\,001^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} < x < \frac{1\,000\,000^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}},$$

т. е.

$$\frac{3}{2} \cdot 1\,000\,001^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 4^{\frac{2}{3}} < x < \frac{3}{2} \cdot 1\,000\,000^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 3^{\frac{2}{3}}.$$

Так как

$$\frac{3}{2} \cdot 1\,000\,001^{\frac{2}{3}} > \frac{3}{2} \cdot 1\,000\,000^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot 10\,000 = 15\,000,$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} < 4, \quad \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} > \frac{3}{2}\sqrt[3]{8} = 3,$$

то

$15\,000 - 4 < x < 15\,000 - 3$, т. е. $14\,996 < x < 14\,997$.

Из этих неравенств следует, что $[x] = 14\,996$.

§ 4. В этом параграфе мы применим рассмотренные ранее неравенства к решению задач на максимум и минимум [1]).

Задача 1. Найти наименьшее значение функции

$$x^\alpha - ax,\ a > 0,\ x \geqslant 0,\ \alpha > 1.$$

Решение. Задача решается очень просто в том случае, когда $\alpha = 2$. В самом деле, так как

$$x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$

то наименьшее значение функция имеет при $x = \frac{a}{2} > 0$, причем значение это равно $-\frac{a^2}{4}$.

В случае произвольного $\alpha > 1$ задача решается с использованием неравенства (12), доказанного в теореме 3. Так как $\alpha > 1$, то

$$(1 + z)^\alpha \geqslant 1 + \alpha z,\ z \geqslant -1,$$

причем равенство имеет место только при $z = 0$. Полагая здесь $1 + z = y$, получим:

$$y^\alpha \geqslant 1 + \alpha(y - 1),\ y^\alpha - \alpha y \geqslant 1 - \alpha,\ y \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только при $y = 1$. Умножая обе части последнего неравенства на c^α, получим:

$$(cy)^\alpha - \alpha c^{\alpha-1}(cy) \geqslant (1 - \alpha)c^\alpha,\ y \geqslant 0.$$

Полагая

$$x = cy \text{ и } \alpha c^{\alpha-1} = a,\ c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

получим:

$$x^\alpha - ax \geqslant (1 - \alpha)c^\alpha = (1 - \alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

причем знак равенства имеет место только при $x = c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

---

[1]) О применении неравенств второй степени к решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин рассказано в книжке: И. П. Натансон, Простейшие задачи на максимум и минимум. Физматгиз, 1960 (серия «Популярные лекции по математике», выпуск 2), изд. 3.

Итак, функция

$$x^\alpha - ax,\ \alpha > 1,\ a > 0,\ x \geqslant 0,$$

принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, равное $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. В частности, функция $x^2 - ax$ $(\alpha = 2)$ принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}} = \frac{a}{2}$, равное $(1-2)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2-1}} = -\frac{a^2}{4}$. Этот результат согласуется с выводом, полученным ранее другим путем. Функция $x^3 - 27x$ принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = 3$, равное $(1-3)\left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}} = -54$.

Примечание. Отметим для дальнейшего, что функция

$$ax - x^\alpha = -(x^\alpha - ax),$$

где $\alpha > 1$, $a > 0$, $x \geqslant 0$, принимает наибольшее значение в точке

$$x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

равное $(\alpha - 1)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

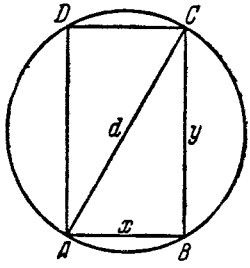

Рис. 1.

Задача 2. Из круглого бревна выпилить балку наибольшей прочности [1]).

Решение. Пусть $AB = x$ — ширина балки, $BC = y$ — высота ее и $AC = d$ — диаметр бревна (рис. 1). Обозначая через P прочность балки, получим:

$$P = kxy^2 = kx(d^2 - x^2) = k(d^2x - x^3).$$

---

[1]) Прочность балки прямо пропорциональна произведению ширины балки на квадрат ее высоты.

Функция $d^2x - x^3$ принимает наибольшее значение при

$$x = \left(\frac{d^2}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad y^2 = d^2 - x^2 = \frac{2}{3}d^2,$$

$$y = \frac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = x\sqrt{2} \approx 1{,}4\,x = \frac{7}{5}x.$$

Таким образом, балка будет иметь наибольшую прочность, если отношение ее высоты к ширине будет равно $\frac{7}{5}$.

Задача 3. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sin x \sin 2x.$$

Решение. Так как $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, то

$$\sin x \sin 2x = 2\cos x \sin^2 x = 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 2(z - z^3),$$

где $z = \cos x$ и, следовательно, $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Функция $z - z^3 = z(1 - z^2)$ имеет отрицательное значение, если $-1 \leqslant z < 0$, а для $0 \leqslant z \leqslant 1$ принимает положительное

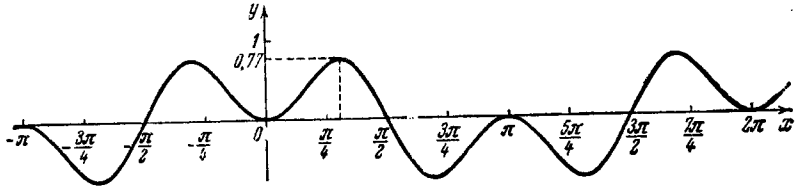

Рис. 2.

значение. Следовательно, наибольшее значение функции достигается на отрезке $0 < z \leqslant 1$.

В задаче 1 показано, что функция $z - z^3$, $z \geqslant 0$ принимает наибольшее значение в точке

$$z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В этой точке

$$\sin x \sin 2x = 2z(1 - z^2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Итак, функция $y = \sin x \sin 2x$ принимает наибольшее значение в тех точках, в которых $z = \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и это

значение равно $\frac{4}{3\sqrt{3}}$. График функции $y = \sin x \sin 2x$ изображен на рис. 2.

Задача 4. Найти наибольшее значение функции

$$y = \cos x \cos 2x.$$

Решение. Функция $y = \cos x \cos 2x$ не превосходит 1, так как каждый из сомножителей $\cos x$ и $\cos 2x$ не

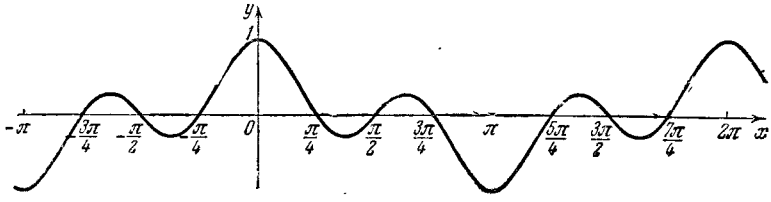

Рис. 3

превосходит 1. Но в точках $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

$$\cos x \cos 2x = 1.$$

Итак, функция $y = \cos x \cos 2x$ принимает наибольшее значение 1 в точках $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ График функции $y = \cos x \cos 2x$ изображен на рис. 3.

Задача 5. Найти наименьшее значение функции

$$x^\alpha + ax,$$

где $a > 0$, $\alpha < 0$, $x \geqslant 0$.

Решение. Так как $\alpha < 0$, то согласно неравенству (12)

$$(1 + z)^\alpha \geqslant 1 + \alpha z,$$

причем знак равенства имеет место только при $z = 0$. Полагая $1 + z = y$, $z = y - 1$, получим:

$$y^\alpha \geqslant 1 + \alpha (y - 1), \quad y \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только при $y = 1$. Из последнего неравенства следует, что

$$y^\alpha - \alpha y \geqslant 1 - \alpha, \quad (cy)^\alpha - \alpha c^{\alpha - 1} (cy) \geqslant (1 - \alpha) c^\alpha.$$

Полагая $a = -\alpha c^{\alpha-1}$, $x = cy$, получим:

$$x^\alpha + ax \geqslant (1-\alpha)c^\alpha = (1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

причем знак равенства имеет место только при $x = c = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Итак, функция $x^\alpha + ax$ принимает наименьшее значение в точке $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, равное

$$(1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Например, функция

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 27x, \quad x \geqslant 0$$

принимает наименьшее значение в точке

$$x = \left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}-1}} = \frac{1}{27}.$$

Это значение равно

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}} = 4$$

Задача 6. Найти наиболее выгодные размеры сосуда цилиндрической формы [1]), имеющего дно и крышку (консервная банка).

Решение. Пусть $V = \pi r^2 h$ — объем сосуда, где r — радиус, h — высота цилиндра. Полная поверхность сосуда имеет площадь

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

---

[1]) Размеры сосуда считаются наиболее выгодными, если при заданном объеме требуется наименьшее количество материала для его изготовления, т. е. сосуд имеет наименьшую площадь поверхности.

Так как $h = \frac{V}{\pi r^2}$, то

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Полагая $x = \frac{1}{r}$, получим:

$$S = 2\pi x^{-2} + 2Vx = 2\pi\left(x^{-2} + \frac{V}{\pi} x\right).$$

Функция $x^{-2} + \frac{V}{\pi} x$, согласно решению предыдущей задачи, принимает наименьшее значение при

$$x = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{-2-1}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}.$$

Возвращаясь к нашим прежним обозначениям, найдем:

$$\frac{1}{r} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}, \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi}, \quad r = \frac{h}{2}, \quad h = 2r = d.$$

Таким образом, сосуд имеет наиболее выгодные размеры, если высота и диаметр сосуда одинаковы.

Упражнения

6. Найти наибольшее значение функции $x(6 - x)^2$ при $0 < x < 6$.

Указание. Положить $y = 6 - x$.

7. Из квадратного листа со стороною $2a$ требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем получающиеся выступы так, чтобы коробка получилась наибольшего

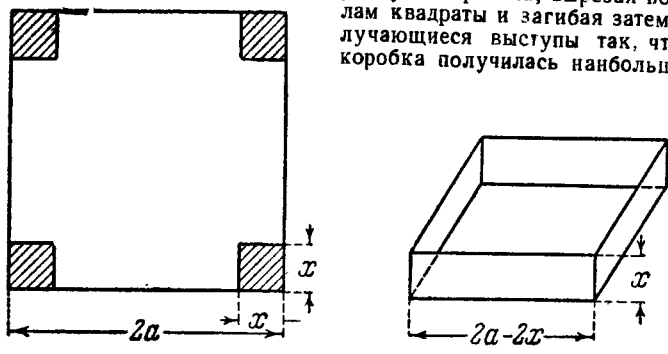

Рис. 4.

объема (рис. 4). Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов?

8. Найти наименьшее значение функции

$$x^6 + 8x^2 + 5.$$

9. Найти наименьшее значение функции

$$x^6 - 8x^2 + 5.$$

10. Найти наибольшее значение функции

$$x^\alpha - ax,$$

если $0 < \alpha < 1$, $a > 0$, $x \geqslant 0$.

11. Доказать, что при $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\sqrt[4]{x} \leqslant \frac{3}{8} + 2x.$$

12. Доказать, что при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством (7).

13. Найти наибольшее из чисел

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$$

14. Доказать неравенство

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

15. Доказать неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

если числа a_i одного знака и не меньше -1.

16. Доказать неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \\ \leqslant a_n^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2). \qquad (19)$$

Указание. Докажите сначала, что многочлен

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 = \\ = x^2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + \\ + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

не может иметь двух различных действительных корней.

17. Пользуясь неравенством (19), доказать, что среднее арифметическое не больше среднего квадратического.

18. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

19. Пользуясь неравенством упражнения 18, доказать неравенство

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

20. Найти наибольшее значение функций:

$$\frac{x^3}{x^4+5},\quad x^6-0{,}6x^{10}.$$

Отв. $\frac{3}{4\sqrt[4]{15}}$; 0,4.

21. При каком значении a наименьшее значение функции $\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}$ равно 2,5?

Отв. $a=8$.

§ 5. В этом параграфе мы рассмотрим еще несколько важных неравенств и укажем применение их к вычислению некоторых пределов.

Задача 1. Доказать, что если $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x>0$, $y>0$, то

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \tag{20}$$

Решение. В начале § 4 (задача 1) мы доказали неравенство

$$x^\alpha-ax\geqslant(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

если $\alpha>1$, $a>0$, $x\geqslant 0$.

Полагая в этом неравенстве $\alpha=p$, $a=py$, получим:

$$x^p-(py)x\geqslant(1-p)\left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}=(1-p)\,y^{\frac{p}{p-1}}. \tag{21}$$

Так как $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p},\quad q=\frac{p}{p-1},\quad p-1=\frac{p}{q}.$$

Подставляя эти значения в неравенство (21), получим:

$$x^p-pyx\geqslant-\frac{p}{q}\,y^q.$$

Разделив все члены последнего неравенства на p и перенеся в противоположную сторону отрицательные члены, мы получим неравенство (20).

Задача 2. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, а p и q удовлетворяют условиям задачи 1, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}. \quad (22)$$

Решение. Положим

$$a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p = A^p, \quad b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q = B^q.$$

Тогда правая часть неравенства (22) будет равна

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} (B^q)^{\frac{1}{q}} = AB.$$

Теперь положим

$$a_1 = Ac_1, \quad a_2 = Ac_2, \quad \ldots, \quad a_n = Ac_n,$$
$$b_1 = Bd_1, \quad b_2 = Bd_2, \quad \ldots, \quad b_n = Bd_n.$$

Так как

$$A^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p = A^pc_1^p + A^pc_2^p + \ldots + A^pc_n^p =$$
$$= A^p(c_1^p + c_2^p + \ldots + c_n^p),$$

то

$$c_1^p + c_2^p + \ldots + c_n^p = 1.$$

Точно так же проверяется, что

$$d_1^q + d_2^q + \ldots + d_n^q = 1.$$

Пользуясь теперь неравенством (20), получим:

$$\left.\begin{aligned} a_1b_1 = AB(c_1d_1) &\leqslant AB\left(\frac{c_1^p}{p} + \frac{d_1^q}{q}\right), \\ a_2b_2 &\leqslant AB\left(\frac{c_2^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nb_n &\leqslant AB\left(\frac{c_n^p}{p} + \frac{d_n^q}{q}\right). \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Из этих неравенств следует, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$$

$$\leqslant AB\left(\frac{c_1^p + c_2^p + \ldots + c_n^p}{p} + \frac{d_1^q + d_2^q + \ldots + d_n^q}{q}\right) =$$

$$= AB\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = AB$$

(напомним, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $c_1^p + c_2^p + \ldots + c_n^p = 1$, $d_1^q + d_2^q + \ldots + d_n^q = 1$).

Итак, доказано, что левая часть неравенства (22) не превосходит AB, т. е. не превосходит правой части.

Нетрудно указать тот случай, когда в (22) имеет место знак равенства. В самом деле, знак равенства в (21) имеет место только при

$$x = \left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{q}{p}},\quad x^p = y^q$$

(см. задачу 1 § 4). Точно так же знак равенства в каждой строке (*) будет иметь место, только когда

$$c_1 = d_1^{\frac{q}{p}},\quad c_2 = d_2^{\frac{q}{p}},\ \ldots,\quad c_n = d_n^{\frac{q}{p}},$$

т. е. когда

$$c_1^p = d_1^q,\quad c_2^p = d_2^q,\ \ldots,\quad c_n^p = d_n^q.$$

Наконец, умножив эти равенства на A^pB^q, получим:

$$B^q(Ac_1)^p = A^p(Bd_1)^q,\ \text{т. е. } B^qa_1^p = A^pb_1^q,$$

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{A^p}{B^q},\quad \frac{a_2^p}{b_2^q} = \frac{A^p}{B^q},\ \ldots,\ \frac{a_n^p}{b_n^q} = \frac{A^p}{B^q}.$$

Таким образом, знак равенства в (22) имеет место, если

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \ldots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

Примечание. Полагая в неравенстве (22) $p=2$, $q=2$, получаем неравенство (19) (см. упражнение 16):

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

Задача 3. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad [1] \tag{23}$$

Решение. Объединяя неравенства (7) и (8) § 2, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Логарифмируя эти неравенства при основании e, окончательно найдем:

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Задача 4. Полагая $z_1 = 1+\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, $z_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, $z_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$, ..., $z_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, найти $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Решение. Заменяя n на $n-1$ в первой части неравенства (23), получим:

$$\frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ln\frac{n}{n-1}.$$

Из этого неравенства и второй части неравенства (23) следует, что

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1}. \tag{24}$$

Теперь, пользуясь неравенствами (24), напишем неравенства:

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1},$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n},$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \ln\frac{n+2}{n+1},$$

. . . . . .

$$\ln\frac{2n+1}{2n} < \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{2n-1}.$$

---

[1] $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ обозначает логарифм от $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ при основании e (см. стр. 17).

Сложив их и учитывая, что сумма логарифмов равна логарифму произведения, получим:

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}{n(n+1)(n+2)\ldots 2n}<$$

$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(n-1)n(n+1)\ldots(2n-1)},$$

т. е.

$$\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}. \qquad (25)$$

Так как $\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

Точно так же из $\frac{2n}{n-1}=2+\frac{2}{n-1}$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n}{n-1}=\ln 2.$$

Итак, крайние члены неравенств (25) имеют одинаковые пределы. Следовательно, и средний член имеет тот же предел, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}z_n=\ln 2.$$

Задача 5. Положив

$$x_1=1,\ x_2=1-\frac{1}{2},\ x_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \ldots$$

$$\ldots,\ x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Решение. Имеем:

$$x_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

В предыдущей задаче мы положили

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Следовательно, $x_{2n} = z_n - \frac{1}{n}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ln 2$ (см. предыдущую задачу). Таким образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(z_n - \frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

Заметим еще, что $x_{2n+1} = x_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2.$$

Примечание. Числа $x_1 = a_1$, $x_2 = a_1 + a_2$, $x_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называются *частичными суммами* ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел. В этом случае число $S = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ называют *суммой ряда*.

Из задачи 5 следует, что ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

сходится и имеет сумму, равную $\ln 2$.

Задача 6. Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

называется *гармоническим рядом*. Доказать, что гармонический ряд расходится.

Решение. Согласно неравенству (23)

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}.$$

Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, напишем n неравенств

$$1 > \ln\frac{2}{1},$$
$$\frac{1}{2} > \ln\frac{3}{2},$$
$$\frac{1}{3} > \ln\frac{4}{3},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}.$$

Складывая их, получим:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \ln(n+1).$$

Из этого неравенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

следовательно, гармонический ряд расходится.

Задача 7. Доказать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \qquad (26)$$

сходится при любом $\alpha > 1$.

Решение. Последовательность частичных сумм этого ряда

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{2^\alpha},$$
$$x_3 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha},$$
$$x_4 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

монотонно возрастает, т. е.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_n < \ldots$$

С другой стороны, известно, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность чисел имеет конечный предел. Следовательно, если мы докажем, что последовательность чисел x_n ограничена, то будет доказана и сходимость ряда (26). Положим

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Так как

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - \ldots -$$

$$- \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha},$$

то (числа в каждой скобке положительны)

$$y_{2n} < 1.$$

С другой стороны,

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) -$$

$$- 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Так как $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$, то

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n.$$

Теперь, так как $x_{2n} > x_n$, $y_{2n} < 1$, то

$$1 > y_{2n} > x_n - \frac{2}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n.$$

Отсюда следует, что

$$x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2},$$

т. е. числа x_n при $\alpha > 1$ ограничены. Тем самым доказано, что ряд (26) сходится и сумма его не больше $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$.

Например, если $\alpha = 2$, то

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{2^2 - 2} = 2,$$

$$S = \lim_{n \to \infty} x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \leqslant 2.$$

В курсе высшей математики доказывается, что

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (27)$$

Упражнения

22. Найти сумму ряда

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Указание. Используйте равенство (27).

Ответ. $S = \frac{\pi^2}{12}$.

23. Доказать неравенства

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

24. Полагая

$$x_n = 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha,$$

доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

25. Доказать неравенство

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots + a_nb_nc_n)^3 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3),$$

если числа a_k, b_k, c_k положительны.

Указание. Используйте неравенство (10) и метод доказательства (22).

26. Полагая $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}$, где k — целое положительное число, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln k.$$

Указание. Используйте метод решения задачи 4 настоящего параграфа.

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. Полагаем в неравенствах (1) (стр. 6) $n = m,\ m+1,\ \ldots,\ n$:

$$2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} < 2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1},$$

$$2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1} < \frac{1}{\sqrt{m+1}} < 2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m},$$

$$2\sqrt{m+3} - 2\sqrt{m+2} < \frac{1}{\sqrt{m+2}} < 2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}.$$

2. Полагая в неравенствах задачи 1 $m = 10\,000$, $n = 1\,000\,000$, получим:

$$2\sqrt{1\,000\,001} - 2\sqrt{10\,000} < \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 2\sqrt{1\,000\,000} - 2\sqrt{9999}.$$

Так как

$$2\sqrt{1\,000\,001} > 2\sqrt{1\,000\,000} = 2000, \quad 2\sqrt{10\,000} = 200,$$

$$2\sqrt{9999} = \sqrt{39\,996} > 199{,}98$$

(последнее неравенство можно легко проверить, извлекая квадрат-

ный корень с точностью до 0,01), то

$$2000 - 200 = 1800 < \frac{1}{\sqrt{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt{10\,001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 2000 - 199{,}98 = 1800{,}02.$$

3. Умножая неравенства задачи 2 на 50, получим в наших обозначениях

$$90\,000 < 50z < 90\,001,$$

отсюда

$$[50z] = 90\,000.$$

4. При $n = 1$ справедливость неравенства очевидна:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

Предполагая теперь, что неравенство справедливо для $n = k$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}. \qquad \text{(а)}$$

докажем его справедливость для $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \qquad \text{(б)}$$

Умножив неравенство (а) на $\frac{2k+1}{2k+2}$, получим:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Остается доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Умножив его на $(2k + 2)\sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$ и возводя обе части полученного неравенства в квадрат, получим:

$$(2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(3k+1),$$

или

$$12k^3 + 28k^2 + 19k + 4 < 12k^3 + 28k^2 + 20k + 4.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $k \geqslant 1$.

Этим доказано, что неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

справедливо для всех n.

5. Полагая в неравенстве задачи 4 $n = 50$, получим:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{3\cdot 50+1}} = \frac{1}{\sqrt{151}} < \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}.$$

6. Полагая $y = 6 - x$, $x = 6 - y$, мы сведем задачу к нахождению наибольшего значения функции

$$(6 - y)\, y^2 = 6y^2 - y^3$$

при $0 < y < 6$. Полагая затем $y^2 = z$, получим функцию

$$6z - z^{\frac{3}{2}},$$

наибольшее значение которой (см. замечание в конце задачи 1 § 4) равно

$$\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}} = \frac{1}{2}\cdot 4^3 = 32$$

и достигается в точке

$$z = \left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}} = 4^2$$

Функция $6y^2 - y^3$ принимает наибольшее значение в точке $y = 4$, и это значение равно 32.

Функция $x(6 - x)^2$ принимает наибольшее значение 32 в точке $x = 6 - 4 = 2$.

7. Объем коробки (см. на стр. 32 рис. 4) равен

$$V = x(2a - 2x)^2 = 4x(a - x)^2, \quad 0 < x < a.$$

Полагая $y = a - x$, $y^2 = z$, получим:

$$V = 4(az - z^{\frac{3}{2}}).$$

Наибольшее значение функции $az - z^{\frac{3}{2}}$ достигается в точке

$$z = \left(\frac{a}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}} = \left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Следовательно,

$$y = \frac{2a}{3}, \qquad x = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Таким образом, объем коробки будет наибольшим, если длина стороны вырезаемого квадрата в шесть раз меньше длины стороны данного квадрата.

8. Наименьшее значение функции $x^6 + 8x^2 + 5$ равно 5 и достигается при $x = 0$.

9. Полагая $y = x^2$, сведем задачу к нахождению наименьшего значения функции

$$y^3 - 8y + 5$$

для положительных значений y.

В задаче 1 § 4 мы доказали, что наименьшее значение функции $y^3 - 8y$ равно

$$(1-3)\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}} = -2\frac{8^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = -\frac{32\sqrt{6}}{9}.$$

Наименьшее значение функции $y^3 - 8y + 5$ равно

$$-\frac{32\sqrt{6}}{9} + 5 = -3{,}6\ldots$$

10. Полагая $y = x^\alpha$, получим функцию

$$y - ay^{\frac{1}{\alpha}} = a\left(\frac{1}{a}y - y^{\frac{1}{\alpha}}\right), \quad a > 0, \quad \frac{1}{\alpha} > 1.$$

В силу задачи 1 § 4, наибольшее значение функции $\frac{1}{a}y - y^{\frac{1}{\alpha}}$ равно

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}-1}} = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Умножая последнюю величину на a, мы и найдем наибольшее значение функции $a\left(\frac{1}{a}y - y^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, которое, следовательно, равно

$$(1-\alpha)\frac{a}{\alpha}\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1+\frac{1}{\alpha-1}} = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

11. Функция $\sqrt[4]{x} - 2x$, $x \geqslant 0$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $a = 2$, имеет наибольшее значение, равное

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}} = \frac{3}{4}\cdot 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}.$$

Следовательно, для всех $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\sqrt[4]{x} - 2x \leqslant \frac{3}{8}, \text{ или } \sqrt[4]{x} \leqslant \frac{3}{8} + 2x.$$

12. Запишем неравенство (7) § 2 в виде

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e, \quad (n+1)^n < en^n.$$

Если $n \geqslant 3 > e$, то

$$(n+1)^n < en^n < 3n^n \leqslant nn^n = n^{n+1}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $\frac{1}{n(n+1)}$, получим:

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

13. Так как $1 < \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$, то $\sqrt[3]{3}$ наибольшее из чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$. С другой стороны, в предыдущей задаче мы показали, что числа $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$ убывают. Следовательно, $\sqrt[3]{3}$ — наибольшее из чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$

14. Положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$ Возводя в степень n, получим:

$$n = (1+\alpha_n)^n = [(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}}]^2.$$

Предполагая, что $n \geqslant 2$, $\frac{n}{2} \geqslant 1$, на основании теоремы 3 получим:

$$(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}} > 1 + \frac{n}{2}\alpha_n, \; n > \left(1 + \frac{n}{2}\alpha_n\right)^2 = 1 + n\alpha_n + \frac{n^2}{4}\alpha_n^2.$$

Отсюда следует, что

$$n > \frac{n^2}{4}\alpha_n^2, \quad \alpha_n^2 < \frac{4}{n}, \quad \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Примечание Пользуясь биномом Ньютона, легко проверить, что

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

В самом деле

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{2}{n} + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{2}{n} = n.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

15. При $n = 1$ и $a_i > -1$ неравенство очевидно:

$$1 + a_1 \geqslant 1 + a_1.$$

Предположим, что неравенство справедливо для $n = k$, т. е.

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_k) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Умножив обе части неравенства на $(1 + a_{k+1})$, получим:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geqslant$$

$$\geqslant (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(1 + a_{k+1}) =$$

$$= 1 + a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} + a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \ldots + a_ka_{k+1}.$$

Так как числа $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ одного знака, то

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \ldots + a_ka_{k+1} \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1},$$

т. е. неравенство доказано и для $n = k + 1$.

Этим завершено доказательство справедливости неравенства

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

для всех n.

16. Если многочлен $(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$ имеет действительный корень $x = x_1$, т. е.

$$(a_1x_1 - b_1)^2 + (a_2x_1 - b_2)^2 + \ldots + (a_nx_1 - b_n)^2 = 0,$$

то каждое из чисел $a_1x_1 - b_1, a_2x_1 - b_2, \ldots, a_nx_1 - b_n$ равно нулю, т. е.

$$0 = a_1x_1 - b_1 = a_2x_1 - b_2 = \ldots = a_nx_1 - b_n,$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}.$$

Этим мы доказали, что многочлен

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 =$$

$$= x^2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) - 2x\,(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) +$$

$$+ \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

не может иметь двух различных действительных корней, и, следовательно,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \leqslant 0.$$

Отсюда и следует неравенство (19)

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Заметим, что знак равенства имеет место, только когда рассмотренный нами многочлен имеет действительный корень, т. е. когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

17. Пользуясь неравенством (19), получим:

$$c_1^2 = \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{a_1^2}{n} + \frac{a_2^2}{n} + \ldots + \frac{a_n^2}{n}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{n} =$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} = c_2^2.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 \leqslant c_2$$

(среднее арифметическое не превосходит среднего квадратического).

18. Из неравенства

$$\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)^2 = n + 1 + 2\sqrt{n^2-1} + n - 1 =$$

$$= 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 2n + 2\sqrt{n^2} = 4n$$

следует, что

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{2}.$$

Умножая на 2, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

19. Полагаем в неравенстве упражнения 18 $n = 2, 3, \ldots, n$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} - 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{4} - \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \sqrt{5} - \sqrt{3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{6} - \sqrt{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Сложив написанные неравенства, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - 1.$$

Прибавив по 1 к обеим частям неравенства, окончательно найдем:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}.$$

Примечание. В § 1 было доказано, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1.$$

Числа $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$ и $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1$ отличаются друг от друга менее чем на 0,42. Каждое из этих чисел может быть взято за приближенное значение суммы

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = z_n.$$

Отметим без доказательства, что число $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$ менее отличается от числа z_n, чем число $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1$.

20. Функция $\frac{x^3}{x^4 + 5}$ принимает отрицательные значения при $x < 0$. Следовательно, наибольшее значение функции достигается для положительных значений x.

Так как

$$\frac{x^3}{x^4 + 5} = \frac{1}{5\left(\frac{1}{5}x + x^{-3}\right)},$$

то наибольшее значение функции достигается в той же точке,

в которой функция $\frac{1}{5}x + x^{-3}$ принимает наименьшее значение. Из задачи 5 § 4 следует, что наименьшее значение этой функции равно

$$(1+3)\left(\frac{\frac{1}{5}}{3}\right)^{\frac{-3}{-3-1}} = 4\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Наибольшее значение функции $\frac{x^3}{x^4+5}$ равно

$$\frac{1}{5\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{15^{\frac{3}{4}}}{20} = \frac{15}{\sqrt[4]{20^4\cdot 15}} = \frac{3}{\sqrt[4]{4^4\cdot 15}}.$$

Чтобы найти наибольшее значение функции $x^6 - 0{,}6x^{10}$, положим $y = x^6$. Ясно, что $y \geqslant 0$. Функция

$$y - 0{,}6y^{\frac{10}{6}} = 0{,}6\left(\frac{10}{6}y - y^{\frac{10}{6}}\right)$$

принимает наибольшее значение (см. задачу 1 § 4), равное

$$0.6\left(\frac{10}{6}-1\right)\left(\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-1}} = 0{,}4.$$

21. Полагая в этой задаче $y = \frac{1}{x^2}$, получим:

$$\sqrt{x} + \frac{a}{x^2} = y^{-\frac{1}{4}} + ay.$$

Наименьшее значение функции $y^{-\frac{1}{4}} + ay$, как это следует из задачи 5 § 4, равно

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)(4a)^{\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}}.$$

Полагая $\frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}} = 2{,}5$, получим:

$$(4a)^{\frac{1}{5}} = 2,\ 4a = 32,\ a = 8.$$

22. $S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ldots =$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) - \frac{2}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

(мы воспользовались неравенством (27)).

23. Так как $\alpha > 0$, то $\alpha + 1 > 1$ и, следовательно,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 + \frac{1+\alpha}{n},$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 - \frac{1+\alpha}{n}.$$

Умножая эти неравенства на $n^{1+\alpha}$, получим:

$$(n+1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} + (1+\alpha)\,n^{\alpha},$$

$$(n-1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} - (1+\alpha)\,n^{\alpha}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Запишем эти неравенства при значениях $n = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\frac{1}{1+\alpha} < 1 < \frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha},$$

$$\frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < 2^{\alpha} < \frac{3^{1+\alpha} - 2^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

. . . . . .

$$\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Сложив их, получим:

$$\frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} < 1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

24. Из неравенств упражнения 23 следует, что

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha}}{n^{1+\alpha}} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Левая часть последних неравенств есть постоянное число $\frac{1}{1+\alpha}$, а правая часть стремится к пределу, равному $\frac{1}{1+\alpha}$, когда n стремится к бесконечности. Следовательно, и средняя часть неравенств стремится к тому же пределу, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}}{n^{1+\alpha}}=\frac{1}{1+\alpha}.$$

25. Введем обозначения

$$A^3=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3,\quad B^3=b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3,$$

$$C^3=c_1^3+c_2^3+\ldots+c_n^3,$$

$$x_1=\frac{a_1}{A},\ x_2=\frac{a_2}{A},\ \ldots,\ x_n=\frac{a_n}{A},\ y_1=\frac{b_1}{B},\ y_2=\frac{b_2}{B},\ \ldots,\ y_n=\frac{b_n}{B},$$

$$z_1=\frac{c_1}{C},\ z_2=\frac{c_2}{C},\ \ldots,\ z_n=\frac{c_n}{C}.$$

На основании неравенств (10) имеем:

$$a_1b_1c_1=ABCx_1y_1z_1\leqslant ABC\frac{x_1^3+y_1^3+z_1^3}{3},$$

$$a_2b_2c_2=ABCx_2y_2z_2\leqslant ABC\frac{x_2^3+y_2^3+z_2^3}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_nb_nc_n=ABCx_ny_nz_n\leqslant ABC\frac{x_n^3+y_n^3+z_n^3}{3}.$$

Сложив выписанные неравенства, получим:

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n)\leqslant$$

$$\leqslant ABC\left(\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{3}+\frac{y_1^3+y_2^3+\ldots+y_n^3}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{z_1^3+z_2^3+\ldots+z_n^3}{3}\right).$$

Учитывая введенные обозначения, легко подсчитать, что

$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{A^3}=\frac{A^3}{A^3}=1,$$

$$y_1^3+y_2^3+\ldots+y_n^3=1,\quad z_1^3+z_2^3+\ldots+z_n^3=1.$$

Следовательно,

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots + a_nb_nc_n) \leqslant ABC\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = ABC.$$

Возводя в куб обе части неравенства, окончательно получим:

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots + a_nb_nc_n)^3 \leqslant A^3B^3C^3 =$$
$$= \left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right)\left(b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_n^3\right)\left(c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3\right).$$

26. Выпишем неравенства (24) для различных значений n:

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1},$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ln\frac{kn+1}{kn} < \frac{1}{kn} < \ln\frac{kn}{kn-1}.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)\ldots(kn+1)}{n(n+1)\ldots kn} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{kn} <$$
$$< \ln\left[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{kn}{kn-1}\right],$$

т. е.

$$\ln\frac{kn+1}{n} = \ln\left(k + \frac{1}{n}\right) <$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn} < \ln\frac{kn}{n-1} = \ln\left(k + \frac{k}{n-1}\right).$$

Если n стремится к бесконечности, то $\ln\left(k + \frac{1}{n}\right)$ стремится к $\ln k$ и $\ln\left(k + \frac{k}{n-1}\right)$ стремится к этому же пределу. Следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k.$$

Павел Петрович Коровкин

НЕРАВЕНСТВА

(Серия: «Популярные лекции по математике»)
М., 1966 г., 56 стр. с илл.

Редактор *А. П. Баева*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская*
Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в наб. 8/IV 1966 г. Подп. к печ. 11/VII 1966 г.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 1,75. Усл. печ. л. 2,94
Уч.-изд. л. 3,13. Т-07198. Тираж 75 000 экз.
Заказ № 719. Цена 9 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Цена 9 коп. 10-

2149/4

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. В. Г. Шераватов. Гиперболические функции.
Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. Л. И. Головина и И. М. Яглом. Индукция в геометрии.
Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скоряков. Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование.
Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений.
Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние?
Вып. 39. Н. Н. Воробьев. Признаки делимости.
Вып. 40. С. В. Фомин. Системы счисления.
Вып. 41. Б. Ю. Коган. Приложение механики к геометрии.